COMPETENCES NUMERATION, PROGRAMME CYCLE II

Documents d'accompagnement (dir : Charnay)

COMPETENCES VISEES	Activités
Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels (inférieurs à 1000)	
Dénombrer et réaliser des quantités en utilisant le comptage un à un, ou des groupements et des échanges par dizaines, ou des groupements et des échanges par dizaines et centaines.	Utilisation d'une bande numérique ou d'une ligne graduée en début d'apprentissage Entraînement aux perceptions globales (jusqu'à 5), montrer le nombre sur les doigts
Comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre.	Privilégier les activités de **groupement**, avec matériel, plutôt que les activités **d'échanges** (qui nécessitent de distinguer valeur et quantité, à réserver à la monnaie au CE1) Ne pas forcer sur « dizaine » ou « centaine » tant que « paquet de dix » ou « paquet de cent » ne sont pas maîtrisées
Produire des suites orales et écrites de nombres de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100 (en avant et en arrière, à partir de n'importe quel nombre), en particulier citer le nombre qui suit ou qui précède un nombre donné.	S'assurer que les élèves comprennent l'équivalence entre « ajouter 1 » (ou retrancher 1) et « avancer d'une case » (ou reculer d'une case) sur la file numérique Utiliser des compteurs ou calculatrices
Associer les désignations chiffrées et orales des nombres de 1 à 30, de 1 à 99, de 1 à 999.	Trois étapes : 1/9, 20/59 (avec appui sur les régularités de vingt, trente, quarante, cinquante), puis étude spécifique 60/79, 80/99 (CE1 pour beaucoup d'élèves) Puis nombres de trois chiffres sans difficulté particulière (insister sur « on dit la centaine, puis on groupe dizaine et unité comme on sait le faire pour les nombres<100) N'introduire l'écriture littérale que très progressivement, lorsque l'oral est bien maîtrisé. Aider pour l'orthographe.
Ordre sur les nombres entiers naturels	
Comparer, ranger, encadrer des nombres (en particulier entre deux dizaines consécutives ou entre deux centaines consécutives).	Différentier le notion de l'utilisation (ultérieure) du symbole < ou > (à référer à = comme signe d'égalité entre deux écritures et pas seulement le signe indiquant un résultat) Faire le lien avec les pages d'un livre (p34 avant p45) Amorcer la réflexion sur « 132 est entre 100 et 200, mais plus près de 100 »
Situer des nombres (ou repérer une position par un nombre) sur une ligne graduée de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100.	
Relations arithmétiques entre les nombres entiers naturels	
Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant: doubles des nombres inférieurs à 10, des dizaines entières inférieures à 100, moitié de 2, 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80.	A partir de la construction de la numération décimale (étape primordiale, longue et décisive), importance décisive de l'entraînement au calcul mental (voir document spécifique)
Connaître et utiliser les relations entre des nombres d'usage courant : entre 5 et 10 ; entre 25 et 50 ; entre 50 et 100 ; entre 15 et 30, entre 30 et 60 ; entre 12 et 24	La moitié de 20, 30 ou 50 peuvent être automatisées en fin de cII, mais 70 ou 90 sont à travailler en calcul réfléchi, notamment à l'oral (moitié de 70 = moitié de 60 plus moitié de 10)

DANS QUELS PROBLEMES ?

Le sens des nombres et des opérations s'élabore à travers la résolution de quelques grandes catégories de problèmes :

- exprimer et garder en mémoire
- une quantité,
- une position dans une liste rangée,
- le résultat d'un mesurage ;
- comparer des quantités ou des grandeurs, notamment lorsque les collections ou les objets sont matériellement éloignés l'une de l'autre ;
- prévoir quel sera le résultat d'actions sur des quantités, des positions ou des grandeurs (augmentation, diminution, réunion, partage, déplacement...).

DIRE EN MATHEMATIQUES

Les moments de mise en commun, d'explicitation des démarches et des résultats, d'échange d'arguments à propos de leur validité, se déroulent essentiellement de manière orale. On veillera, dans ces moments, à maintenir un équilibre entre les formulations spontanées utilisées par les élèves

et la volonté de mettre en place un langage plus élaboré.
Cette volonté ne doit pas freiner l'expression des élèves. Les moments de reformulation et de synthèse sont davantage l'occasion de mettre en place un vocabulaire et une syntaxe corrects.

Écrire en mathématiques

Les élèves sont fréquemment placés en situation de production d'écrits. Il convient à cet égard de développer et de bien distinguer trois types d'écrits dont les fonctions sont différentes :
– les écrits de type «**recherche**» correspondent au travail privé de l'élève. Ils ne sont pas destinés à être communiqués, ils peuvent comporter des dessins, des schémas, des figures, des calculs. Ils sont un support pour essayer, se rendre compte d'une erreur, reprendre, rectifier, organiser sa recherche. Ils peuvent également être utilisés comme mémoire transitoire au cours de la résolution du problème. Si l'enseignant est amené à les consulter pour étudier le cheminement
de l'élève, il ne doit ni les critiquer, ni les corriger
;
– les écrits destinés à être **communiqués** et discutés peuvent prendre des formes diverses (par exemple, affiche, transparent). Ils doivent faire l'objet d'un souci de présentation, de lisibilité, d'explicitation, tout en sachant que, le plus souvent, ils seront l'objet d'un échange entre les élèves au cours duquel des explications complémentaires seront apportées ;
– les écrits de **référence** sont élaborés en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève ou de la classe. Ils sont donc destinés à être conservés et doivent être rédigés dans une forme correcte.
Ce n'est que progressivement que ces trois types d'écrits seront bien distingués, notamment au cycle 3.
L'exigence syntaxique ou graphique (soin, présentation) varie également selon la finalité de la trace écrite, et ne doit pas faire obstacle à l'objectif principal qui reste l'activité de réflexion mathématique.
On sera attentif en particulier à ne pas se limiter à des formes **stéréotypées**, sécurisantes, mais pour lesquelles l'exigence formelle prime trop souvent sur le contenu de l'explication.
L'attention doit également être attirée sur l'importance de la **synthèse** effectuée au terme d'un apprentissage. Celle-ci peut permettre d'élaborer un écrit trouvant sa place dans un aide-mémoire ou un mémento dans lesquels sont consignés les savoirs essentiels.

Matériel et manipulations

Le travail mathématique est évidemment un travail de l'esprit. Mais celui-ci, en particulier à l'école élémentaire, s'exerce souvent à partir de questions posées sur des objets ou sur des expériences. Le **matériel** présent dans la classe doit donc être riche, varié et mis à disposition des élèves: cubes, jetons, bouliers, compteurs, instruments de géométrie et de mesure, jeux, etc.

Il faut cependant se convaincre que **ce n'est pas la manipulation** d'un matériel qui constitue l'activité mathématique, mais les **questions** qu'elle suggère. Il convient ainsi de bien distinguer les tâches de constat ou d'observation, qui invitent l'élève à lire une réponse sur le matériel, des tâches **d'anticipation** qui lui demandent d'élaborer, de construire par lui-même une réponse dont il pourra ensuite **vérifier** la validité en revenant à l'expérience. C'est dans ce dernier cas que l'élève fait des mathématiques.
Un exemple très simple permet de comprendre cette distinction. Au début du cycle 2, lorsque l'enseignant place sur la table 5 cubes rouges et 3 cubes bleus et demande aux élèves combien il y a de cubes sur la table, il provoque une activité de simple dénombrement, suffisante pour donner la réponse. Lorsqu'il place successivement les 5 cubes rouges et les 3 cubes bleus dans une boîte **opaque** et, après avoir fermé la boîte, pose la même question aux élèves, il oblige l'élève à trouver un moyen pour construire la réponse. Le dénombrement effectif des cubes dans la boîte ne servira pas alors à lire la réponse, mais à vérifier si la réponse construite est correcte ou non. C'est dans des activités de ce type que les élèves peuvent commencer à percevoir la puissance de leurs connaissances mathématiques, même si celles-ci sont encore modestes.

Des entrées… spécifiques ?

Problème de changement de code (vingt-cinq, 25, //.....)

Jarlegan, Fayol et Barrouillet (1996) ont étudié en détail sur plus de 200 enfants francophones de CE1 entraînés à l'utilisation du matériel les performances dans des opérations de transcodage entre trois codes: code verbal écrit (« treize »), code arabe (« 13 ») et code analogique (petits carrés 1x1 cm pour les unités, des réglettes de 10x1 cm pour les dizaines, des carrés de 10x10 cm pour les centaines...
Les données ont montré que les transcodages intervenant entre le code verbal (« soixante-seize») et le code analogique (///////......) étaient significativement moins bien réussis (64% en moyenne) que les transcodages entre codes arabe et analogique ((82% en moyenne) et entre code verbal et arabe
(80%). Les irrégularités du code verbal français, notamment pour les dizaines complexes et pour les nombres les incluant, étaient à l'origine de la faiblesse des performances. Les résultats ont également mis en évidence que le transcodage entre codes verbal et arabe n'était pas équivalent à la composition des transcodages entre codes verbal et analogique, d'une part, et entre code analogique et arabe d'autre part. Ce constat est intéressant car il suggère que les transcodages entre code verbal et code arabe ne transitent pas nécessairement par une représentation intermédiaire sémantique et amodale, ici opérationnalisée par du matériel analogique couramment utilisé dans les classes.

76%
CHIFFRES ---> VERBAL
À partir de l'écrit « 76 »... écrire « soixante-seize »
81 % 65 %
CHIFFRES -----------------------------> ANALOGIQUE ----------------------------> VERBAL
À partir de l'écrit « 76 »... dessiner [///////......] écrire « soixante-seize »

63 % 84 %
VERBAL -----------------------------> ANALOGIQUE ----------------------------> CHIFFRES
A partir du mot écrit « soixante-seize »... dessiner [///////......] écrire « 76 »

82 %
VERBAL ---> CHIFFRES
À partir du mot écrit « soixante seize » écrire « 76 »

Pourcentages de réussite aux différentes épreuves de transcodage
(VERBAL = code alphabétique lettres, CHIFFRES = code en chiffres, digits
ANALOGIQUE = représentation analogique).

Place de la question dans un problème... (Fayol)
Fayol, Abdi & Gombert (1987) ont observé qu'il suffisait de placer la question au début des énoncés de problèmes de transformation pour entraîner une amélioration des performances, notamment plus accusée chez les plus faibles.

Taux de réussite à des problèmes :

	Question au début	Question à la fin
Bon calculateur bon lecteur	28	26
Bon calculateur faible lecteur	24	19
Faible calculateur bon lecteur	24	17
Faible calculateur faible lecteur	21	12

Ces résultats sont compatibles avec les faits mis en évidence relativement à la lecture/compréhension de textes. Pour la plupart des faibles compreneurs, et sans doute, des faibles en arithmétique, ce ne sont pas d'abord les aspects conceptuels qui posent problème. Le sens des opérations, les conditions de leurs emplois semblent relativement précocement acquis. En revanche, la capacité à élaborer une représentation de la situation décrite à partir de l'énoncé et à conserver parallèlement les données pour les traiter une fois la question formulée se révèle très difficile pour la plupart des enfants.
Leur indiquer d'emblée par l'énoncé de la question ce qu'ils auront à faire allège donc les traitements et/ou le stockage et induit une amélioration significative des scores.

Brissiaud : la place du langage en maths

Faites l'expérience : construisez le nombre en changeant les nombres par les lettres. Et demandez-vous si Blanche-Neige a plus ou moins H nains ?
L'usage rituel des doigts est un obstacle au progrès, l'usage intelligent des doigts fait progresser.
Certains progressent dans les tâches (compréhension des mots-nombres) grâce à l'étude de la grammaire de la langue : on présente des poupées, dont certaines se ressemblent. « Tu vois, ça, c'est ZAV. ». A l'autre moitié, on dit « Tu vois, c'est une ZAV ». Ensuite, on cache la poupée désignée et on dit « Tu donnes ZAV ». Il répond « Je ne la vois pas ». Si on lui dit « tu me donnes une ZAV », il donne une poupée ressemblante, indiquant qu'il s'appuie sur les contraintes linguistiques d'usage des mots pour en appréhender la signification. Dans « il y a cinq vaches », l'enfant est analyseur de la grammaire, ce qui, lorsque c'est accompagné par une représentation analogique du mot-nombre, est la meilleure voie pour faire accéder l'enfant à la construction de la valeur cardinale du nombre.
En cachant la fiche où sont écrites les collections de nombre que je veux comparer, et en disant « écoute, je vais compter ces collections que je vois : 1, 2, 3, 4, 5... et «1, 2, 3, 4, 5, 6 », je rends saillant ce qui est crucial (« le langage »)
Travailler sur le nombre, sur le plan conceptuel, c'est articuler travail sur les représentations et travail sur le calcul (décomposition-recomposition)

Difficulté spécifique de la numération en français

L'organisation linguistique du système de dénomination verbale des quantités fait apparaître un lexique fini et une syntaxe traduisant, par le biais de l'ordre des items, des relations d'abord additives (vingt-quatre, cinquante-six) puis multiplicatives (quatre-vingts ; deux cents)

Exemples d'expressions numériques en Anglais, Chinois et Français :

	Français	Anglais	Chinois
1	un, une	one	yi
2	deux	two	er
3	trois	three	san
10	dix	ten	shi
11	onze	eleven	shi yi
12	douze	twelve	shi er
13	treize	thirteen	shi san
20	vingt	twenty	er shi
21	vingt et un	twenty-one	er shi yi
22	vingt-deux	twenty-two	er shi er
23	vingt-trois	twenty-three	er shi san

En conséquence, d'une part, les jeunes Français (et, en général, les jeunes occidentaux) doivent apprendre par coeur la suite des dénominations, au moins jusqu'à 16. Au-delà, le système verbal devient plus régulier: dix-sept, vingt-cinq. Il s'ensuit que leurs performances sont significativement inférieures à celles des jeunes Chinois dès que ceux-ci doivent compter au-delà de 10 (Fuson & Kwon, 1991; Miller et al., 1995). Les enfants chinois et anglais réussissent aussi bien, car les uns et les autres traitent les dénominations verbales allant jusqu'à dix, lesquelles exigent un apprentissage par coeur des mots et de leur ordre de succession. Par contraste, à 4 et 5 ans, les jeunes Chinois comptent mieux et plus loin que leurs pairs anglophones, une supériorité qui se maintient tout au long de la scolarité élémentaire, voire au-delà, si des activités spécifiques ne sont pas mises en place.

Numération décimale (Brissiaud)

Encore les équivalences de procédures : on peut compter jusqu'à 432 en suivant la file numérique (1,2, 3,4 ... jusqu'à 432), mais aussi en changeant d'unité : 4 centaines (un cent, deux cents, trois cents, quatre cents), 3 dizaines...
Donc, compter des cents, c'est comme compter des dix... ou compter des unités.
Regardons ce qui se passe dans la comparaison des enfants asiatiques et européens, à travers deux tâches, dont une pas très pertinente :
Quand on demande de construire une collection de 42, puis 30, 11, 28, 13 cubes, il peut compter un par un 42 cubes. Si on lui demande d'utiliser une autre manière faire (en attendant qu'il prenne 4 barres de 10 et 2 unités), tous les enfants coréens utilisent les barres de 10. Aux USA, un enfant sur deux ne réussit pour aucun des nombres. Mais attention : risque de verbalisme (on pense que le texte du savoir est le savoir lui-même).
A-t-il bien compris que la barre de dix est à la fois une grande unité, et formée sur 10 petites unités (toujours le double point de vue) ? C'est ce qui fait la différence entre les enfants en difficultés (qui n'accèdent pas au double sens de la barre de 10.)

Il faut donc trouver une tâche qui permet de prouver que l'enfant prend bien les deux points de vue : on présente une collection de 3 barres et 11 cubes, et on demande de compter et d'écrire 42. Ensuite, on leur demande de montrer ce qui, dans le matériel, correspond au 4 et au 2 : l'enfant est obligé de construire le 10 qui manque à partir des unités. Sur cette tâche, 25% des enfants américains réussissent, 46% au Japon, 58% en Corée... Ce qui prouve que près d'un enfant sur deux qui avait réussi la tâche précédente ne peut réussir. J'appelle ça « le rôle négatif des fausses réussites » (par référence au « statut de l'erreur ») qui masque au pédagogue la difficulté de certains élèves... malgré la réussite à la tâche proposée ! D'où l'idée d'enseigner les deux suites verbales (dix-un, dix-deux, dix-trois... mais aussi onze, douze, treize...), afin d'apprécier ceux qui se laissent porter par le langage. Une étude de Fuson amène 55% de réussite lorsque l'enseignement est en anglais, 82% en espagnol.

Entendre l'erreur (Charnay) et aider l'élève à « chercher »

En sortant de l'école primaire, beaucoup d'enfants ne savent pas encore ce que signifie le mot « chercher ». Beaucoup pensent qu'il faut « chercher » dans sa tête la solution déjà stockée (au sens de chercher un trésor) au lieu de se mettre à bidouiller pour fabriquer une réponse qui n'est pas toute faite, qui est à construire, qui est originale... Donc, quand je suis face à un problème, l'école ne m'apprend pas assez à me situer dans « je me débrouille » pour trouver.

1. Entendre l'élève

Ne pas s'arrêter à la réponse

Faire expliciter le cheminement (entretien d'explicitation sur « comment » plutôt que sur « pourquoi »)

L'élève évoque-t-il une règle ou une connaissance en acte ?

2. Essayer de comprendre

- Hypothèse sur les origines de son cheminement
-Le référer à un cadre interprétatif théorique

3. Aider l'élève à prendre conscience de son processus :

- Ne pas le centrer uniquement sur la réponse
- Le faire expliciter à d'autres

4. Aider à prendre conscience de l'existence d'autres processus possibles

- Explicitations mutuelles
- Formulations orales ou écrites

5. Provoquer des conflits socio-cognitifs

- pointer les idées opposées
- les mettre en débat
- inciter à la recherche d'une vérité, indépendante de l'adulte

6. Provoquer des conflits cognitifs

- Situation problème
- Validation indépendante du maître

Mémoire de travail

Daniel Gaonac'h et Anne Fradet in « Les sciences cognitives et l'école ».

La notion de mémoire de travail, qui permet de retenir et de transformer l'information reçue, se différentie de l'idée de mémoire « à court terme » qui renvoie à un système de stockage temporaire passif. Elle joue un rôle central dans les activités cognitives centrales (compréhension du langage, lecture, production écrite, raisonnement, calcul...)

Pour Baddeley, elle comporte trois composants :

un administrateur central, qui coordonne les sources d'information (visuelles, sensitives, auditives...).

Deux sous-ensemble en dépendent :

une boucle phonologique qui stocke temporairement l'information verbale

un calepin visuo-spatial qui stocke temporairement l'information visuelle.

Ce modèle peut être contesté, mais reste le modèle de base

Mémoire de travail verbale (boucle phonologique)

Le nombre d'éléments verbaux qu'on peut répéter après une présentation croît jusqu'à 11-12 ans où il atteint sa performance maximale. Ce n'est qu'à partir de 7 ans qu'apparaissent des comportements stratégiques (recodage phonologique), les plus jeunes cherchant à utiliser des stratégies visuelles (avec de grandes différences entre individus).

D'autres sources…

Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques, *numération, opérations, nombres décimaux et proportionnalité,* ***Odette Bassis***

Proposer des situations-problèmes qui abordent des concepts clés en mathématiques, c'est enclencher des processus, étape par étape, pour mobiliser le potentiel d'intelligence souvent insoupçonné des élèves, donner sens et efficacité aux apprentissages fondamentaux, restituer aux savoirs leurs dimensions culturelles et civilisatrice et se construire une pensée autonome et critique à travers des apprentissages solidaires.

Le pari délibéré de l'auteur est de dégager de chaque notion abordée à l'école élémentaire et au collège, non seulement " ce qu'il y a à savoir", mais aussi et surtout de faire se construire "ce qu'il y a à comprendre pour savoir".

Hachette Education, 2003, 253 p, 21.10 ¤

Mathématiques : quand les enfants prennent pouvoir, *des démarches d'auto-socio-construction pour l'Ecole*, ***Odette Bassis***

Cet ouvrage propose aux instituteurs et professeurs par les concepts-clés des programmes, des démarches où le "comprendre c'est inventer" de Piaget est pris au pied de la lettre. Un chapitre entier propose notamment de revisiter en profondeur l'introduction de la numération décimale en plongeant les élèves dans une situation qui rappellera l'épistémologie des maths : nous sommes il y a bien longtemps, tu ne sais pas compter au delà de 4, et pourtant il faut que tu envoies à l'intendant du prince le nombre de moutons de ton troupeau…

Des pratiques où les élèves ré-inventent le principe de numération, les unités de mesure,...

G.F.E.N., 1991, 200 p, 12.96 ¤