

***LES REPRESENTATIONS PRE-ALGEBRIQUES DES  
ELEVES SORTANT DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE***

***Synthèse de la recherche en pédagogie n°231/97***

***I. DEMONTY et J. VLASSIS***

Tél. : 04/366.20.51  
Fax : 04/366.28.55

Service de Pédagogie expérimentale  
Université de Liège (Sart-Tilman)  
Sart Tilman - Bât. B32  
4000 Liège

## C

et article présente une analyse des résultats à une épreuve de mathématiques soumise à des élèves en début de première année du secondaire. Cette épreuve portait sur plusieurs domaines mathématiques impliqués dans l'apprentissage de l'algèbre et était destinée à mesurer des acquis pré-algébriques d'une large population (1083 sujets). L'objectif principal ne consistait donc pas à examiner le rendement des élèves en mathématiques mais bien d'analyser leurs réponses dans certains domaines afin de cerner au mieux leurs représentations en début d'apprentissage de l'algèbre. Les exercices concernaient pour l'essentiel le signe d'égalité, le sens de la lettre et du symbolisme algébrique, la modélisation et les notions d'aire et de périmètre.

### **Le signe d'égalité**

---

L'analyse des réponses des élèves montre que la majorité d'entre eux présente une conception procédurale des expressions mathématiques, c'est-à-dire que celles-ci sont considérées comme des opérations qu'il faut effectuer, qui doivent être suivies d'un signe d'égalité et d'une réponse unique et numérique. Dans cette perspective, le signe d'égalité est considéré comme l'amorce d'un résultat.

Voici un exemple de question de l'épreuve qui témoigne de cette représentation :

*« Je multiplie le nombre 15 par 7, puis je retire 3 au produit »  
Ecris en un seul calcul ce qui est décrit dans l'énoncé ci-dessus.*

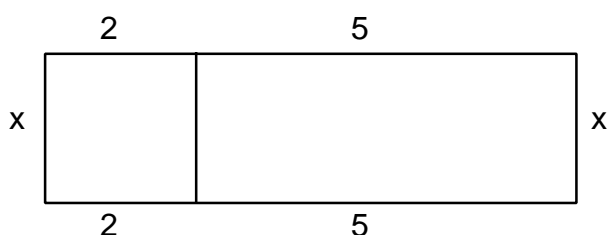
63% des élèves ont complété l'opération par le signe d'égalité et le résultat, alors que ces informations ne figurent pas dans l'énoncé.

L'apprentissage de l'algèbre fait rapidement intervenir une conception nouvelle des expressions et du signe d'égalité. Par exemple, lors de transformations d'expressions, ou de résolution d'équations où l'inconnue se trouve dans les deux membres, il s'agira de porter un autre regard sur celles-ci. Le deuxième membre de l'égalité n'est plus la "réponse" du premier et le signe de l'égalité ne signifie plus "donne tel résultat". Les deux membres doivent être envisagés comme des expressions différentes d'un même nombre et l'égalité doit être considérée en tant que telle avec ses propriétés de symétrie et de transitivité. Cette évolution nécessite un apprentissage progressif et approfondi, qui est loin d'aller de soi. Si l'enseignant n'insiste pas sur l'importance de cet apprentissage, les élèves vont être particulièrement désorientés face aux nouveaux concepts algébriques. Dans ce cas, la plupart va fonctionner en algèbre tout en conservant ces "automatismes" arithmétiques.

Une des conséquences les plus répandues de ce que nous aurions envie d'appeler ce malentendu mathématique concerne la réduction de termes non semblables. Cette difficulté, souvent attribuée à un manque d'étude de la part de l'élève, dénote en fait un manque de compréhension des concepts sous-jacents.

En effet, simplifier par exemple l'expression  $2a+5a+3b$  en termes de  $7a+3b$  représente un obstacle conceptuel important pour de nombreux élèves. Cet obstacle est lié à la fois à la conception du signe d'égalité mais aussi à la présence du signe opératoire qui subsiste dans l'expression simplifiée. En effet, pour la plupart des débutants en algèbre, le signe d'égalité doit être suivi d'une réponse qui ne peut comporter de signe opératoire. K. F. COLLIS (1974, in J. COLOMB, 1995) a utilisé le terme "acceptance of lack of closure" pour décrire la capacité de l'apprenant à considérer des expressions algébriques composées de signe(s) d'opération(s) comme résultat d'une opération. De nombreuses études ont montré que le passage à l'"acceptance of lack of closure" est loin d'être naturel chez les élèves.

Par exemple, CHALOUH et HERSCOVICS (1988 in C. KIERAN, 1992) ont proposé aux élèves l'expression  $2x + 5x$  correspondant à l'aire de la figure suivante :



La plupart des élèves ont considéré que cette expression était incorrecte en écrivant des égalités telles que  $2x + 5x = \text{aire}$  ou  $2x + 5x = \text{quelque chose}$ .

Ce besoin de compléter les expressions algébriques a également été constaté par C. KIERAN (1992) chez certains élèves incapables de donner du sens à la lettre  $a$  dans l'expression  $a + 3$ , parce qu'il manque le signe d'égalité et le second membre de l'égalité.

Afin d'aider les élèves à ne pas réduire des termes non semblables, les adultes ont souvent recours à l'expression "on n'additionne pas des pommes et des poires". Cette explication est non seulement incorrecte d'un point de vue mathématique, mais reste aussi superficielle. Elle ne permet pas à l'élève de s'appropriier les concepts de base. Elle focalise l'attention uniquement sur la procédure et non sur la compréhension des notions impliquées dans l'égalité.

## **Le sens de la lettre**

---

C'est au travers de l'analyse des réponses des élèves à l'exercice suivant que nous avons pu dégager leurs conceptions de la lettre :

*Tu n'as certainement jamais (ou alors très peu) effectué les opérations avec des lettres.*

*Mais à ton avis, quelle réponse donnerais-tu aux trois opérations suivantes*

*(a, t, p désignent des nombres qu'on ne connaît pas) :*

$$2p + 3p =$$

$$a + a + a =$$

$$t + 6t =$$

Trois types de conception de la lettre se dégagent de l'analyse effectuée: la lettre est remplacée par un nombre, elle est ignorée ou elle représente l'abréviation d'un nom commun ou d'une unité.

### **La lettre est remplacée par un nombre**

---

Les élèves lui attribuent une valeur numérique, et effectuent ensuite le calcul pour aboutir à une réponse numérique. Cette attribution d'une valeur numérique peut se réaliser de différentes façons.

#### ***La lettre est remplacée par le nombre désignant sa position dans l'alphabet***

(a = 1, b = 2, c = 3, ...).

Par exemple, les élèves effectuent le premier calcul de la façon suivante:

$$\begin{aligned}2p + 3p &= 2.16 + 3.16 \\ &= 32 + 48 \\ &= 80\end{aligned}$$

Cette référence à l'alphabet a également été dégagée dans d'autres études. Ainsi, S. WAGNER et al. (1981, in C. KIERAN, 1992) a posé la question suivante à environ mille élèves anglais âgés de 12 à 17 ans :

$$\begin{aligned}7 + w + 22 &= 109 \\ 7 + n + 22 &= 109\end{aligned}$$

Quel est le plus grand ? w ou n ?

37% des élèves interrogés ne peuvent admettre que les lettres ont la même valeur qu'en recourant au calcul. Au départ, ils estiment que "w" est plus grand car cette lettre est située plus loin dans l'alphabet.

#### ***La lettre est remplacée par le coefficient numérique des expressions algébriques proposées.***

Ainsi, par exemple, le calcul  $2p + 3p$  est effectué de la façon suivante :

$$\begin{aligned}2p + 3p &= 2.2 + 3.3 \\ &= 4 + 9 \\ &= 13\end{aligned}$$

Dans ce cas, la lettre peut prendre différentes valeurs à l'intérieur d'une même expression algébrique.

***L'attribution d'une valeur numérique s'effectue en référence avec les autres exercices du test***. Dans le deuxième calcul, a est remplacé par 5 parce que dans une question précédente du test, on demande de calculer la valeur numérique d'une expression algébrique pour a = 5.

### **La lettre est associée au nombre 10.**

Par exemple,  $2p$  est associée au nombre 20. L'expression  $2p + 3p$  est alors considérée comme égale à  $20 + 30$ .

### **La lettre est ignorée**

---

La calcul se fait uniquement sur base de coefficients numériques des expressions. Les élèves donnent des réponses numériques comme 5 (pour  $2p + 3p$ ), 0 ou 3 (pour  $a + a + a$ ), 6 ou 7 (pour  $t + 6t$ ). Remarquons cependant que, pour le deuxième calcul, il est difficile de voir si l'élève a ignoré la lettre ou s'il l'a remplacée par le nombre désignant sa position dans l'alphabet.

### **La lettre représente une abréviation d'un nom commun ou d'une unité**

---

Ce type d'erreur amène les élèves à écrire des réponses de type  $2p + 3p = 5$  *pommes* ou, plus fréquemment,  $6t + t = 7$  *tonnes*. Dans ce cas, la lettre est associée à un objet. Le signe de multiplication omis entre un nombre et une lettre n'est pas été pris en considération par l'élève.

Parmi les résultats obtenus aux différents calculs, une tendance se dégage : la plupart des interprétations erronées de la lettre amènent les élèves à attribuer une valeur numérique à celle-ci, souvent en fonction de l'alphabet (environ 90%). Quelques-uns l'ont ignorée complètement (environ 9%). Enfin, très peu ont associé la lettre à un objet (environ 1%).

Les élèves qui ont une conception erronée de la lettre peuvent parfois réduire correctement les expressions. Par exemple, dans l'opération  $2p + 3p =$ , ceux qui considèrent que  $p$  est l'abréviation du mot "pomme" des pommes peuvent écrire la réponse correcte  $5p$ ,  $5p$  désignant 5 pommes. Afin que les élèves puissent comprendre en profondeur les manipulations qu'ils effectuent, ils doivent au moins considérer la lettre comme un nombre inconnu. A travers les résultats obtenus, il semble que cette conception de la lettre n'est pas naturellement acquise par les élèves, et qu'une remise en question de leurs considérations erronées est nécessaire.

### **Quelques modes de compréhension du symbolisme algébrique**

---

L'analyse des réponses des élèves aux calculs algébriques a également permis de dégager quelques représentations concernant le symbolisme algébrique :

- l'omission du signe " ." entre un nombre et une lettre;
- l'omission du coefficient numérique " 1 ";
- la réduction de termes dans une somme algébrique.

### ***L'omission du signe " . " entre un nombre et une lettre***

L'omission du signe de multiplication entre un nombre et une lettre ne s'acquiert pas naturellement.

- Certains élèves estiment qu'il n'y a aucun signe opératoire entre un nombre et une lettre, et que la lettre représente simplement un chiffre, le nombre étant constitué du coefficient numérique (caractérisant les dizaines) et de la lettre (représentant les unités). Ainsi, par exemple, l'expression  $3a$  représente le nombre 31.
- D'autres considèrent qu'il s'agit de l'omission du signe d'addition plutôt que celle du signe de multiplication. Ils effectuent le calcul  $2p + 3p$  de la manière suivante :
$$\begin{aligned}2p + 3p &= 2 + 16 + 3 + 16 \\ &= 37\end{aligned}$$

D'après H. FREUDENTHAL (1973), cette compréhension du symbolisme algébrique est renforcée par la notation fractionnaire des nombres réalisée à l'école primaire où, par exemple, l'expression  $7\frac{2}{5}$  est considérée égale à  $7 + \frac{2}{5}$

### ***L'omission du coefficient numérique " 1 "***

Pour plusieurs élèves, l'absence de coefficient numérique dans les expressions algébriques est associée au coefficient numérique " 0 ". Ces élèves estiment par exemple que l'expression  $t+6t$  est égale  $6t$ . De même, l'expression  $a + a + a$  est considérée égale à  $0a$ .

### ***La réduction de termes dans une somme algébrique***

Plusieurs erreurs des élèves relèvent d'une réduction erronée des termes algébriques. Les erreurs les plus fréquemment commises consistent à utiliser les puissances ou à recopier plusieurs fois la lettre après le coefficient numérique. Par exemple, pour le premier calcul, certains élèves proposent ces solutions :

$$\begin{aligned}2p + 3p &= 5p \\ 2p + 3p &= 5pp\end{aligned}$$

Ces deux démarches semblent indiquer que les élèves ont réduit les termes en se préoccupant d'abord des coefficients numériques et ensuite des parties littérales. Il serait utile de remettre en question ce type de démarche lors des premiers apprentissages algébriques, afin d'éviter que ces élèves ne considèrent le calcul algébrique comme un simple jeu d'écriture mettant en oeuvre des chiffres et des lettres.

## La modélisation

Nous considérons la modélisation comme une représentation mathématique d'une situation donnée. Elle peut prendre la forme de graphiques, de schémas, d'opérations numériques, d'équations ou de formules.

Cinq questions de l'épreuve concernaient la capacité des élèves à modéliser par une expression mathématique (opérations ou équations) un problème classique (c'est-à-dire une situation mathématique exprimée en langage littéraire). En effet, il apparaît que dans la résolution de problèmes en algèbre, une des difficultés majeures consiste à écrire correctement l'équation.

Qu'en est-il des élèves qui entament leur apprentissage de l'algèbre? Quels acquis possèdent-ils déjà? Quelles représentations se font-ils sur le sujet?

L'objectif de l'analyse des résultats à ces questions consiste à mieux cerner les compétences des élèves du début du secondaire en matière de modélisation d'une situation en langage mathématique.

Le tableau ci-dessous reprend l'ensemble des questions relatives à la modélisation et leurs taux de réussite.

Questions n°	Type de questionnement	Taux de réussite
1: A un nombre (que je vais appeler $n$ ), j'ajoute 2. Je multiplie la somme obtenue par 6 et j'obtiens finalement 72.	<b>QCM</b> (question à choix multiple)	<b>66%</b>
2: Je multiplie le nombre 15 par 7, puis je retire 3 au produit.	<b>Question ouverte</b>	<b>67%</b>
3: Six fois un certain nombre (appelons-le $t$ ) est égal à deux fois ce nombre plus 8.	<b>QCM</b>	<b>66%</b>
4: Alexandre achète $y$ cartes "spacix" à 10F pièce. Combien devra-t-il payer en tout?	<b>QCM</b>	<b>88%</b>
5: Pour emprunter des livres à la bibliothèque de l'école, il faut acheter la carte de lecteur à 100F et payer une somme de 2F par livre emprunté. A combien revient l'emprunt de 16 livres?	<b>QCM</b>	<b>70%</b>

Les questions 1, 2, et 3 concernaient des situations plus formelles que les deux autres. Elles se traduisent par des taux de réussite fort similaires alors que les contextes sont différents d'une question à l'autre tant au niveau de la nature des expressions que de la tâche à réaliser. En effet, les questions 1 et 3 étaient à choix multiples, tandis que dans la question n° 2, les élèves devaient produire l'expression décrite dans l'énoncé.

D'autre part, les questions 1 et 2 nous semblaient a priori faciles, en tout cas plus simples que la n° 3 puisqu'elles ne présentaient pas d'opérations dans le second membre de l'égalité. Il semble donc que la difficulté soit davantage liée au caractère inhabituel des énoncés et au formalisme employé (vocabulaire, présence de la lettre). Le vocabulaire utilisé (somme, produit) ne nous semblait pourtant pas insurmontable. Ces faibles taux de réussite semblent montrer que le passage du langage courant au langage mathématique n'est pas simple. Cette difficulté est souvent sous-estimée dans l'enseignement où on observe en général une évolution trop rapide vers la mise en équation. Cette situation entraîne de nombreuses erreurs de la part des élèves.

Les questions 4 et 5 sont plus familières aux élèves que les trois autres. Elles se traduisent par des taux de réussite plus élevés. Même la question 5 qui propose un énoncé complexe a été mieux réussie que les trois premières qui présentaient pourtant la description des opérations.

## **Les notions de périmètre et d'aire**

---

Dans la perspective de l'enseignement en spirale, le programme de mathématiques du premier degré préconise l' " *usage de formules littérales pour calculer le périmètre, l'aire, le volume de formules littérales* " (Ministère de l'éducation et de la formation, 1994). Envisager l'algèbre dans ce contexte permet aux élèves de construire une représentation visuelle des expressions algébriques, et de constater que certaines sont équivalentes parce qu'elles représentent une même aire ou un même périmètre. Cette approche nécessite cependant une maîtrise des notions de périmètre et d'aire, ainsi que les calculs associés.

C'est dans cette optique que nous avons proposé des questions évaluant la maîtrise de ces concepts. L'analyse des réponses des élèves indique qu'ils sont capables d'associer le périmètre au calcul du contour et l'aire, à celui de la surface (91% de réussite). Par contre, il semble que des confusions apparaissent entre les formules à utiliser : certains utilisent la formule d'aire pour calculer un périmètre et inversement. Ces élèves comprennent mal le lien entre les formules et les notions de contour et de surface. Ce type de difficulté correspond dans certains exercices à plus de 60% des erreurs commises.

Afin de rendre cette approche de l'algèbre la plus efficace possible, il semble donc important d'amener les élèves à la maîtrise des notions et des calculs de périmètre et d'aire. L'analyse des résultats montre en effet que ces notions ne sont pas acquises par tous en début de première année.

## La soustraction

---

Enfin, on observe des résultats surprenants pour l'item suivant ,  $89 - 10 =$  ou ?  $10 - 89$ . Huit pour cent des élèves se sont trompés. Alors que l'ensemble des comparaisons simples de cet ordre sont réussies à 99% environ, cet item ne récolte que 92% de réussite. Il semble qu'à l'entrée du secondaire, un certain nombre estime que la soustraction est commutative. Les élèves considèrent les deux expressions comme égales et les traduisent en termes de "on retire 10 de 89" même pour  $10 - 89$ . Ils n'imaginent pas qu'une autre interprétation puisse exister, à ce stade de leur scolarité. Ils sont plongés dans les nombres naturels et n'ont pas ou peu étudié les entiers. Donc,  $10 - 89$  ne peut être interprété que comme  $89 - 10$ , puisque l'expression opposée à celle-ci donnerait une réponse négative qu'ils n'envisagent pas.

## Conclusions

---

L'ensemble de ces constats révèlent qu'en début d'apprentissage, les élèves ont certaines conceptions sur les notions algébriques. Pour l'essentiel, ces conceptions sont issues de leur apprentissage de l'arithmétique réalisé à l'école primaire dans une perspective très différente de celle de l'algèbre. Les développements de la psychologie cognitive actuels mettent en évidence l'importance de tenir compte des connaissances antérieures dans l'enseignement de nouvelles connaissances. Ainsi, J. TARDIF (1992) définit l'apprentissage comme " *l'établissement de liens entre les nouvelles informations et les connaissances antérieures. A cela s'ajoute l'idée que l'apprentissage est essentiellement un processus cumulatif, c'est-à-dire que les nouvelles connaissances s'associent aux connaissances antérieures soit pour les confirmer, soit pour y ajouter des informations, soit pour les nier. Dans ce dernier cas, plutôt exceptionnel, il y aura une longue négociation avec les connaissances antérieures avant que les nouvelles puissent les remplacer.*" (p. 37)

Il semble donc indispensable que le cours d'algèbre prenne en considération ces premiers apprentissages afin de les faire évoluer dans une perspective adaptée aux nouveaux contenus. En effet, faire fi de ces connaissances préalables c'est contraindre les élèves à construire un édifice privé de fondations. Ceux-ci, incapables de faire appel à leur " bon sens " deviennent, selon l'expression de S. BARUK (1985) des " *automathes, c'est-à-dire automates en mathématiques, qui partout font preuve de sens, de sensibilité, mais qui sont réduits à être privés en maths de l'usage de leurs sens et de celui du sens* " (p. 13).

## **Bibliographie**

---

BARUK, S. (1985), *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Paris : Seuil.

COLOMB, J. (1995), *Calcul littéral. Savoir des élèves au collège*. Paris : Institut National de Recherches pédagogiques. Documents et travaux de recherche en éducation.

FREUDENTHAL, H. (1973), Development of the number concept - From the algebraic principle to the organization of algebra. Mathematics as an educational task, 312-331.

KIERAN, C. (1992), *The learning and teaching of school algebra*. In D.A. GROUWS (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York : MacMillan Publishing Company.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DE LA RECHERCHE ET DE LA FORMATION (1995), Programme de mathématiques au premier degré - Réf. 1995/0279/072.

TARDIFF, J.(1992), *Pour un enseignement stratégique*. Montréal, Québec : Ed Logiques.

